Fachbereich 3: Mathematik und Informatik

Seminararbeit

Globale Eigenschaften ebener Kurven
Die isoperimetrische Ungleichung

Ausarbeitung zum Seminarvortrag vom 28. Mai 2020

Dennis Schürholz
schuerholz@uni-bremen.de
Matrikel-Nr. 400 623 1

8. Juli 2020

Dozent*in: Prof. Dr. Anke D. Pohl
Modul: Seminar Differentialgeometrie
VAK: 03-M-Gy8-1

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Diese Ausarbeitung entsteht im Rahmen des Seminars zur Diffentialgeometrie (VAK 03-M-Gy8-1) an der Universität Bremen bei Prof. Dr. Anke D. Pohl im Sommersemester 2020. Ein Fachvortrag zum Thema dieser Ausarbeitung wurde am 28. Mai 2020 durchgeführt.

Als Primärquelle orientiert sich diese Ausarbeitung an Manfredo P. do Carmo (1993). *Differentialgeometrie von Kurven und Flächen.* vieweg studium wobei Grafiken aus der neueren Auflage Manfredo P. do Carmo (2016). *Differential Geometry of Curves and Surfaces.* 2. Aufl. Dover Publications entnommen wurden. Do Carmo beschreibt in Kapitel 1.7 Abschnitt A die isoperimetrische Ungleichung, welche hier ebenfalls behandelt wird. Dabei wird sich diese Ausarbeitung im Aufbau an do Carmo orientieren und an einigen Stellen weitere Ausführungen und Erläuterungen aufnehmen.

Mit isoperimetrischen Figuren, also Figuren gleichen Umfanges, wurde sich bereits im antiken Griechenland beschäftigt. Die Fragestellung, welche auch als isoperimetrisches Problem bekannt ist, lautet *Welche von allen einfachen geschlossenen Kurven in der Ebene mit gegebener Länge ℓ berandet den größten Flächeninhalt?* Dass es sich bei der Lösung um einen Kreis handelt ist eine bereits lang bekannte und anschauliche Tatsache, formale und zufriedenstellende Beweise ohne weitere Annahmen sind jedoch erst seit K. Weierstraß (1870, zit. n. do Carmo 1993, S. 26) bekannt. Der in dieser Ausarbeitung durchgeführte Beweis geht auf E. Schmidt (1939, zit. n. do Carmo 1993, S. 26ff und Großmann 2012) zurück.

In diesem Zusammenhang ist das *Problem der Dido* bekannt und wird häufiger als Beispiel heran gezogen. Nach Überlieferung durfte die phönizische Königin Dido bei der Gründung der Stadt Karthago in Nordafrika mit einer Kuhhaut das Land für eben diese abstecken. Die Kuhhaut wurde dafür zerschnitten und zu einem schmalen Band genäht. Es stellt sich dann die Frage in welcher geometrischen Form damit das Land abgesteckt werden soll, um ein Maximum an Fläche zu erreichen.

Diese Ausarbeitung wird herausstellen, dass der größtmögliche Flächeninhalt bei gegebenem Umfang im Kreis zu finden ist. Im genannten Beispiel kommt hinzu, dass die Stadt an einem Küstenstreifen erbaut werden sollte, also eine Seite der Figur als Gerade entlang der Küste beliebiger Länge angenommen werden kann. Es lässt sich nun sagen, dass die Lösung des Problems der Dido in einem Halbkreis liegt, da dieser als „Halbform“ des Kreises nach Symmetrie die größte Fläche aller „Halbformen“ besitzt.

Hier wird bewusst vernachlässigt, dass die Erde eine Kugel ist und die Betrachtung daher nicht mehr in einem ebenen Raum mit ebenen Kurven befinden.

2 Grundlagen und Konventionen

Um dieses Themengebiet zu erfassen, werden zunächst einige grundlegende Definitionen gegeben und wiederholt, außerdem werden kurze Exkurse zu weithin bekannten Zusammenhängen gegeben, welche z. B. im Beweis in Abschnitt 4 *Die isoperimetrische Ungleichung* aufgegriffen werden.

2.1 Kurven

Definition. *Eine* differenzierbare Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ *ist eine Einschränkung einer differenzierbaren Funktion auf einem offenen Intervall, welches* $[a, b]$ *enthält.*

Definition. *Eine* geschlossene ebene Kurve *ist eine reguläre parametrisierte Kurve* $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^2$*, sodass* α *und alle ihre Ableitungen an den Intervallgrenzen* a *und* b *übereinstimmen.*

$$\alpha(a) = \alpha(b), \qquad \alpha'(a) = \alpha'(b), \qquad \alpha''(a) = \alpha''(b), \qquad \ldots$$

Definition. *Eine (geschlossene ebene) Kurve* α *heißt* einfach*, wenn sie keine weiteren Selbstüberschneidungen/Wiederholungen neben dem Verbindungspunkt an den Intervallgrenzen hat.*

$$\forall t_1, t_2 \in [a, b), t_1 \neq t_2 : \alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$$

Als Konvention werden im Folgenden angenommen, dass $\alpha : [0, \ell] \to \mathbb{R}^2$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve ist und ℓ dabei ist die Länge von α darstellt. Mit C wird die Spur von α bezeichnet, die in den folgenden Abschnitten als „Kurve C" bezeichnet wird. Außerdem sei festgehalten, dass die Krümmung von α mit einem Vorzeichen versehen ist, wie von do Carmo 1993 in Abschnitt 1.5 eingeführt.

In Abbildung 1 ist eine einfache und eine nicht einfache geschlossene Kurve gemäß der eingeführten Definitionen und Konventionen gegenüber gestellt. Dabei wird auch die Laufrichtung der Parametrisierung sowie die Krümmung deutlich.

(a) einfache geschlossene ebene Kurve

(b) (nicht einfache) geschlossene ebene Kurve

Abbildung 1 (do Carmo 2016, Bild 1.20)

2.2 Flächen

Definition. *Das* Innere *von C ist das durch die einfache geschlossene Kurve C umrandete Gebiet in der Ebene. Der Flächeninhalt des Inneren wird auch als von C eingeschlossener Flächeninhalt bezeichnet.*

Definition. *Die* Orientierung *einer einfachen geschlossenen Kurve C bestimmt sich über die Lage des Inneren von C: Ist die Fläche auf der linken Seite der Kurve (in Laufrichtung der Parametrisierung) ist die Orientierung positiv.*

Aus der Definition lässt sich folgern, dass immer eine positiv orientierte Kurve gleicher Fläche gefunden werden kann, da die Parametrisierung beliebig gewählt werden kann.

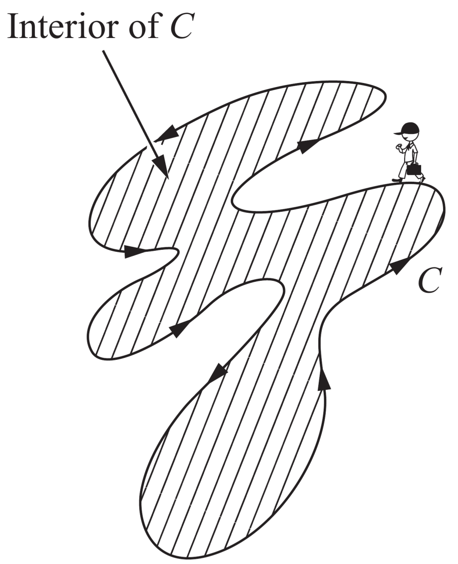


Abbildung 2 Inneres der positiv orientierten Kurve C (do Carmo 2016, Bild 1.21b)

2.3 Exkurse

Satz. *Das geometrische Mittel zweier Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ ist kleiner oder gleich des arithmetischen Mittels dieser Zahlen,*

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \leq \frac{a+b}{2},$$

die Gleichheit gilt genau dann, wenn $a = b$.

Satz (Cauchy-Schwarz-Ungleichung)**.** *Für Skalarprodukte der Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^n$ gilt*

$$|\langle v, w \rangle|^2 \leq \langle v, v \rangle \cdot \langle w, w \rangle,$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn v und w linear abhängig sind.

Für $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ gilt dann insbesondere

$$|v_1 w_1 + v_2 w_2|^2 \leq (v_1^2 + v_2^2) \cdot (w_1^2 + w_2^2).$$

3 Flächeninhalt von geschlossenen Kurven

Wird das Innere einer Kurve betrachtet, so stellt sich die Frage nach der Größe der eingeschlossenen Fläche. Der Beweis des dafür zugrunde liegenden Satzes wird hier als Vertiefung zum Seminarvortrag mit durchgeführt.

3.1 Satz

Satz. *Sei $\alpha(t) = (x(t), y(t)), t \in [a, b]$ eine positiv orientierte einfache geschlossene Kurve und A der von der Kurve eingeschlossene Flächeninhalt.*

Dann gilt:

$$\begin{aligned} A &= -\int_a^b y(t)x'(t)\,dt = \int_a^b x(t)y'(t)\,dt \\ &= \frac{1}{2}\int_a^b (x(t)y'(t) - y(t)x'(t))\,dt \end{aligned} \tag{1}$$

Offensichtlich ergibt sich die untere Zeile aus den beiden ersten Gleichungen. Die Gleichheit dieser ersten Beiden lässt sich wie folgt zeigen. Dabei wird die partielle Integration und eine Eigenschaft geschlossener ebener Kurven (α ist an den Intervallgrenzen identisch) genutzt.

Anmerkung: Im Folgenden wird der Parameter t zur besseren Lesbarkeit häufig nicht mehr erwähnt.

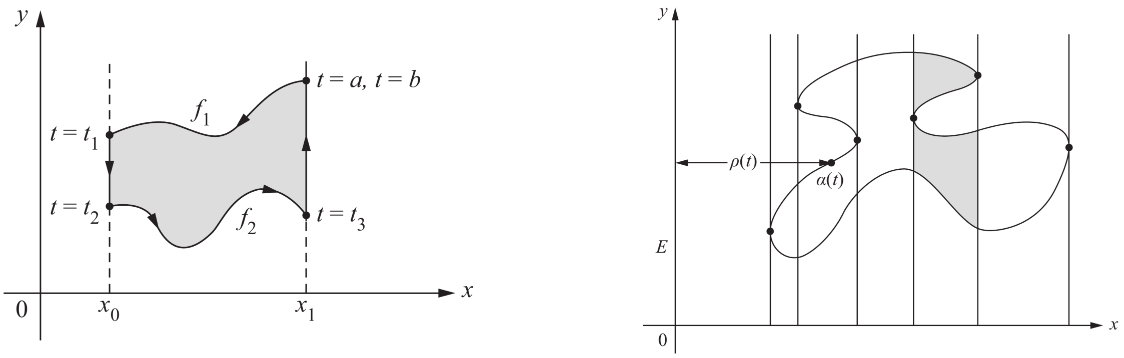
$$\begin{aligned} \int_a^b xy'\,dt &= \int_a^b (xy)'\,dt - \int_a^b x'y\,dt \\ &= [xy(b) - xy(a)] - \int_a^b x'y\,dt \\ &= -\int_a^b x'y\,dt \end{aligned}$$

3.2 Beweis

Zunächst wird der Fall betrachtet, dass wie in Abbildung 3a, die Kurve $\alpha(t) = (x(t), y(t)), t \in [a, b]$ zusammengesetzt ist aus zwei zur y-Achse parallelen geraden Strecken an den Stellen x_0, x_1 sowie zwei Bögen, welche diese Strecken verbinden. Die Bögen seien dabei als $f_1(x), f_2(x)$ mit $x \in [x_0, x_1]$ beschrieben. Beschreibe f_1 dabei den oberen Bogen – da es sich um eine einfache Kurve handelt gilt somit allgemein $f_1 > f_2$.

Bekannt ist bereits aus der Schulmathematik, dass sich der Flächeninhalt dieses Abschnittes bestimmen lässt als

$$A = \int_{x_0}^{x_1} f_1(x)\,dx - \int_{x_0}^{x_1} f_2(x)\,dx.$$



(a) (do Carmo 2016, Bild 1.22) **(b)** (do Carmo 2016, Bild 1.23)

Abbildung 3 Konstruktionen zum Beweis der Flächeninhaltsformel

Nun ist, mit a, b, t_1, t_2, t_3 wie in Abbildung 3a gewählt, zu zeigen

$$A \overset{(*)}{=} -\int_a^{t_1} y(t)x'(t)\,dt - \int_{t_2}^{t_3} y(t)x'(t)\,dt \overset{(**)}{=} -\int_a^b y(t)x'(t)\,dt.$$

Hierfür werden die einzelnen Parameterabschnitte gezeigt:

$$-\int_a^{t_1} y(t)x'(t)\,dt = \int_{x_0}^{x_1} f_1(x)\,dx \tag{i}$$

$$-\int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)\,dt = 0 \tag{ii}$$

$$-\int_{t_2}^{t_3} y(t)x'(t)\,dt = -\int_{x_0}^{x_1} f_2(x)\,dx \tag{iii}$$

$$-\int_{t_3}^{b} y(t)x'(t)\,dt = 0 \tag{iv}$$

Aus (i), (iii) ergibt sich (*) durch Einsetzen in die einfache Flächeninhaltsformel aus dem Schulunterricht. Die Gleichheit in (**) folgt durch die Linearität des Integrals mit (i) - (iv).

Zu (i) Betrachtet man α im Zeitintervall von $[a, t_1]$, so gilt $\alpha(t) = (x(t), y(t)) = (x(t), f_1(x(t)))$, da f_1 genau die Spur von α in diesem Abschnitt beschreibt.
Nach Konstruktion gilt $x(a) = x_1, x(t_1) = x_0$ und $x([a, t_1]) = [x_0, x_1]$.
Nun folgt

$$\begin{aligned}
-\int_a^{t_1} y(t)x'(t)\,dt &= -\int_a^{t_1} f_1(x(t))x'(t)\,dt \\
&= -\int_{x(a)}^{x(t_1)} f_1(x)\,dx \\
&= -\int_{x_1}^{x_0} f_1(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f_1(x)\,dx.
\end{aligned}$$

Zu (ii) Betrachtet man α im Zeitintervall von $[t_1, t_2]$, so gilt $\alpha(t) = (x_0, y(t))$ mit $y(t_1) = f_1(x_0), y(t_2) = f_2(x_0)$ und $y([t_1, t_2]) = [f_2(x_0), f_1(x_0)]$.
Da $x(t) = x_0$ für alle $t \in [t_1, t_2]$ gilt, also $x(t)$ in diesem Intervall konstant ist, folgt $x'(t) = 0$ für alle $t \in [t_1, t_2]$.
Also folgt

$$-\int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)\,dt = -\int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot 0\,dt = 0.$$

Zu (iii) Betrachtet man α im Zeitintervall von $[t_2, t_3]$, so gilt $\alpha(t) = (x(t), y(t)) = (x(t), f_2(x(t)))$, da f_2 genau die Spur von α in diesem Abschnitt beschreibt.
Nach Konstruktion gilt $x(t_2) = x_0, x(t_3) = x_1$ und $x([t_2, t_3]) = [x_0, x_1]$.
Nun folgt

$$\begin{aligned} -\int_{t_2}^{t_3} y(t)x'(t)\,dt &= -\int_{t_2}^{t_3} f_2(x(t))x'(t)\,dt \\ &= -\int_{x(t_2)}^{x(t_3)} f_2(x)\,dx \\ &= -\int_{x_0}^{x_1} f_2(x)\,dx. \end{aligned}$$

Zu (iv) Betrachtet man α im Zeitintervall von $[t_3, b]$, so gilt $\alpha(t) = (x_1, y(t))$ mit $y(b) = f_1(x_1), y(t_3) = f_2(x_1)$ und $y([t_3, b]) = [f_2(x_1), f_1(x_1)]$.
Da $x(t) = x_1$ für alle $t \in [t_3, b]$ gilt, also $x(t)$ in diesem Intervall konstant ist, folgt $x'(t) = 0$ für alle $t \in [t_3, b]$.
Also folgt

$$-\int_{t_3}^{b} y(t)x'(t)\,dt = -\int_{t_3}^{b} y(t) \cdot 0\,dt = 0.$$

Also gilt

$$A = -\int_{a}^{t_1} y(t)x'(t)\,dt - \int_{t_2}^{t_3} y(t)x'(t)\,dt = -\int_{a}^{b} y(t)x'(t)\,dt$$

und somit gilt Gleichung 1 für diesen Fall.

Als Verallgemeinerung kann gezeigt werden, dass sich das von einer beliebigen einfachen geschlossenen Kurve umrandete Gebiet in endlich viele solcher Abschnitte unterteilen lässt. Dies ist in Abbildung 3b veranschaulicht. Hierfür kann der Abstand einer Gerade E (bzw. der y-Achse) zu $\alpha(t)$ als Funktion $\rho(t)$ betrachtet werden. Hat diese Funktion endlich viele kritische Punkte (d. h. $\rho'(t) = 0$, diese Punkte sind in der Abbildung 3b markiert) kann das Gebiet wie gewünscht unterteilt werden. Dies ergibt sich, da an diesen Punkten jeweils zur y-Achse parallele Tangenten an α konstruiert werden können, welche die Fläche in entsprechende Abschnitte aufteilen. Zwei solcher Abschnitte sind in der Grafik hervorgehoben, bei dem oberen Abschnitt liegt noch der Spezialfall vor, dass (wenn die Notation von zuvor angewandt wird) $t_3 = b$ gilt und somit der Summand (iv) entfällt – dieser ist jedoch ohnehin 0. $\square$

4 Die isoperimetrische Ungleichung

Ein zentraler Satz der Differentialgeometrie ist die isoperimetrische Ungleichung, welche das Verhältnis vom Flächeninhalt einer Figur zu dessen Umfang beschreibt. Außerdem geht hieraus hervor, dass ein Kreis den größtmöglichen Flächeninhalt aller Figuren mit gleichem Umfang hat.

4.1 Satz

Satz. *Sei C eine einfache geschlossene ebene Kurve mit der Länge ℓ und A der Flächeninhalt des Inneren von C.*

Dann gilt die isoperimetrische Ungleichung

$$\ell^2 - 4\pi A \geq 0, \tag{2}$$

oder auch

$$A \leq \frac{\ell^2}{4\pi},$$

die Gleichheit gilt genau dann, wenn C einen Kreis beschreibt.

4.2 Beweis

Der Beweis der isoperimetrischen Ungleichung wird in zwei Schritten geführt. So wird zunächst mit Hilfe der Formel für den Flächeninhalt geschlossener Kurven (Gleichung 1) die isoperimetrische Ungleichung erarbeitet (siehe Unterunterabschnitt 4.2.1 *Herleitung der Ungleichung*) und anschließend der zweite Teil des Satzes, also die Bedingung für die Gleichheit (siehe Unterunterabschnitt 4.2.2 *Gleichheit gilt genau dann, wenn C einen Kreis beschreibt*), gezeigt. Dieser Beweis geht auf E. Schmidt (1939, zit. n. do Carmo 1993, S. 26ff und Großmann 2012) zurück.

4.2.1 Herleitung der Ungleichung

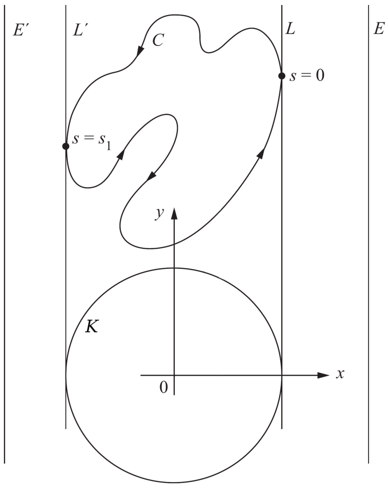
Seien E und E' parallele Geraden und C eine geschlossene Kurve zwischen E und E'. Diese Geraden werden zusammen geschoben bis sie C berühren, die so entstehenden Tangenten an C werden nun L und L' genannt (vgl. Abbildung 4a im oberen Teil). Die Kurve C liegt offensichtlich komplett im Streifen zwischen L und L'.

Konstruiere nun einen Kreis K, der tangential zu L und L' sowie überschneidungsfrei zu C ist. Anschließend wird durch K ein Koordinatensystem derart gelegt, dass der Ursprung im Mittelpunkt von K liegt und die x-Achse senkrecht zu L, L' steht. Außerdem wird eine Parametrisierung von C gewählt, mit den Berührungspunkten $s = 0$ zu L sowie $s = s_1$ zu L' (vgl. Abbildung 4a).

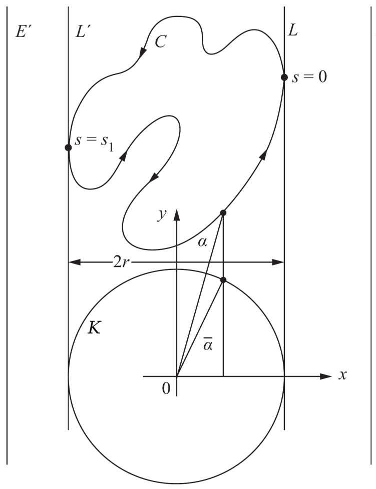
Sei nun die Kurve von C als $\alpha(s) = (x(s), y(s)), s \in [0, \ell]$ beschrieben. Weiterhin ist die Kurve von K nun nach Konstruktion gegeben durch

$$\bar{\alpha} = (\bar{x}(s), \bar{y}(s)) = (x(s), \bar{y}(s)), \text{ mit } s \in [0, \ell].$$

Wie in Abbildung 4b notiert sei $2r$ der Abstand zwischen L und L', also bezeichnet r den Radius von K. $\bar{A} = \pi r^2$ sei der von K eingeschlossene Flächeninhalt.



(a) (do Carmo 2016, Bild 1.24, angepasst)



(b) (do Carmo 2016, Bild 1.24, angepasst)

Abbildung 4 Konstruktion zur Herleitung der isoperimetrischen Ungleichung

Aus $\alpha = (x(s), y(s))$ und $\bar{\alpha} = (x(s), \bar{y}(s))$ lassen sich mit Gleichung 1 die Flächeninhalte wie folgt ausdrücken:

$$A = \int_0^\ell xy' \; ds,$$

$$\bar{A} = \pi r^2 = -\int_0^\ell \bar{y}x' \; ds$$

Durch Addition der Flächeninhalte und Anwenden der Cauchy-Schwarz-Ungleichung für Skalarprodukte von Vektoren des $\mathbb{R}^2$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} A + \pi r^2 &= \int_0^\ell (xy' - \bar{y}x') \; ds \leq \int_0^\ell \sqrt{(xy' - \bar{y}x')^2} \; ds \\ &\leq \int_0^\ell \sqrt{(x^2 + \bar{y}^2)((x')^2 + (y')^2)} \; ds \\ &= \int_0^\ell \sqrt{x^2 + \bar{y}^2} \; ds = \int_0^\ell \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2} \; ds \\ &= \int_0^\ell r \; ds = [\ell r - 0r] = \ell r \end{aligned} \tag{3}$$

Aus dem Zusammenhang zwischen arithmetischen und geometrischen Mittel zweier Zahlen ergibt sich der folgende Zusammenhang, welcher sich zur isoperimetrischen Ungleichung umformen lässt:

$$\begin{aligned} \sqrt{A}\cdot\sqrt{\pi r^2} &\leq \frac{A+\pi r^2}{2} \\ \sqrt{A}\cdot\sqrt{\pi r^2} &\leq \frac{\ell r}{2} \\ A\pi r^2 &\leq \frac{\ell^2 r^2}{4} \\ 4A\pi r^2 &\leq \ell^2 r^2 \\ 4A\pi &\leq \ell^2 \\ \ell^2 - 4\pi A &\geq 0 \end{aligned} \tag{4}$$

4.2.2 Gleichheit gilt genau dann, wenn C einen Kreis beschreibt

Um zu zeigen, dass die Gleichheit in der isoperimetrischen Ungleichung (2) genau dann gilt, wenn die zu betrachtende Kurve C einen Kreis beschreibt, müssen beide Implikationsrichtungen gezeigt werden.

4.2.2.1 C beschreibt einen Kreis $\Longrightarrow$ Gleichheit in (Gleichung 2)

Betrachtet man die isoperimetrische Ungleichung

$$\ell^2 - 4\pi A \geq 0, \tag{2}$$

so gilt die Gleichheit für den Kreis mit $\ell = U_{\text{Kreis}} = 2\pi r$ und $A_{\text{Kreis}} = \pi r^2$, da

$$\begin{aligned} 4\pi A &= \ell^2 \\ 4\pi(\pi r^2) &= (2\pi r)^2 \\ 4\pi^2 r^2 &= 4\pi^2 r^2. \end{aligned}$$

Es bleibt, zu zeigen, dass die Gleichheit auch den Kreis impliziert.

4.2.2.2 Gleichheit in (Gleichung 2) $\Longrightarrow$ C beschreibt einen Kreis

Angenommen in der isoperimetrischen Ungleichung (2) besteht Gleichheit, dann muss auch in den Ungleichungen (3) und (4) jeweils überall Gleichheit gelten.

Aus Gleichheit in Gleichung 4 folgt dann nach Exkurs, dass $A = \pi r^2$.

Anmerkung: Dies stellt bereits den Flächeninhalt eines Kreises mit Radius r dar.

Dadurch ergibt sich

$$\begin{aligned} \sqrt{\pi r^2}\cdot\sqrt{\pi r^2} &= \frac{\ell r}{2} \\ 2\pi r^2 &= \ell r \\ 2\pi r &= \ell. \end{aligned}$$

Anmerkung: Dies stellt bereits den Umfang eines Kreises mit Radius r dar.

Die Gleichheit in Gleichung 3 impliziert

$$(xy' - \bar{y}x')^2 = (x^2 + \bar{y}^2)((x')^2 + (y')^2).$$

Dies lässt sich durch Umformung auch ausdrücken als

$$\begin{aligned}
(xy' - \bar{y}x')^2 &= (x^2 + \bar{y}^2)((x')^2 + (y')^2) \\
x^2(y')^2 - 2xy'\bar{y}x' + \bar{y}^2(x')^2 &= x^2(x')^2 + x^2(y')^2 + \bar{y}^2(x')^2 + \bar{y}^2(y')^2 \\
-2xy'\bar{y}x' &= x^2(x')^2 + \bar{y}^2(y')^2 \\
0 &= x^2(x')^2 + \bar{y}^2(y')^2 + 2xx'\bar{y}y' \\
0 &= (xx' + \bar{y}y')^2.
\end{aligned}$$

Durch weitere Umformungen lässt sich die folgende Verhältnisgleichung ermitteln:

$$\begin{aligned}
(xx' + \bar{y}y')^2 &= 0 \\
xx' + \bar{y}y' &= 0 \\
(xx' + \bar{y}y')(xx' - \bar{y}y') &= 0 \\
x^2(x')^2 - \bar{y}^2(y')^2 &= 0 \\
x^2(x')^2 + x^2(y')^2 - \bar{y}^2(y')^2 - x^2(y')^2 &= 0 \\
x^2(x')^2 + x^2(y')^2 &= \bar{y}^2(y')^2 + x^2(y')^2 \\
x^2((x')^2 + (y')^2) &= (y')^2(\bar{y}^2 + x^2) \\
|x|\sqrt{(x')^2 + (y')^2} &= |y'|\sqrt{\bar{y}^2 + x^2} \\
\left|\frac{x}{y'}\right| &= \frac{\sqrt{\bar{y}^2 + x^2}}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}
\end{aligned}$$

Dies lässt sich für $\left|\frac{\bar{y}}{x'}\right|$ analog zeigen. Also gilt mit Bezug zu Abbildung 4b:

$$\left|\frac{x}{y'}\right| = \left|\frac{\bar{y}}{x'}\right| = \frac{\sqrt{\bar{y}^2 + x^2}}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} = \sqrt{\bar{y}^2 + x^2} = r$$

Also $x = \pm ry'$.

Da r unabhängig von der Richtung von L ist können x und y in der Relation vertauscht werden: $y = \pm rx'$

Damit ergibt sich

$$x^2 + y^2 = r^2(y')^2 + r^2(x')^2) = r^2((x')^2 + (y')^2) = r^2$$

und C ist ein Kreis. $\square$

Appendix

1 Abbildungsverzeichnis

2 Literaturverzeichnis

do Carmo, Manfredo P. (1993). *Differentialgeometrie von Kurven und Flächen*. vieweg studium.

– (2016). *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. 2. Aufl. Dover Publications.

Großmann, Julian P. (Feb. 2012). *Die isoperimetrische Ungleichung*. zuletzt abgerufen am 05.07.2020. URL: *https://jp-g.de/dateien/oldsite/Isoperimetrische%20Ungleichung.pdf*.