Globale Eigenschaften ebener Kurven
Die isoperimetrische Ungleichung

Dennis Schürholz

Grundlagen

Definition. *Eine geschlossene ebene Kurve ist eine reguläre parametrisierte Kurve $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^2$, sodass α und alle ihre Ableitungen an den Intervallgrenzen a und b übereinstimmen.*

$$\alpha(a) = \alpha(b), \qquad \alpha'(a) = \alpha'(b), \qquad \alpha''(a) = \alpha''(b), \qquad \ldots$$

Definition. *Eine (geschlossene ebene) Kurve α heißt einfach, wenn sie keine weiteren Selbstüberschneidungen neben dem Verbindungspunkt an den Intervallgrenzen hat.*

$$\forall t_1, t_2 \in [a, b), t_1 \neq t_2 : \alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$$

Flächeninhalt geschlossener Kurven

Definition. *Das Innere von C ist das durch die einfache geschlossene Kurve C umrandete Gebiet in der Ebene. Der Flächeninhalt des Inneren wird auch als von C eingeschlossener Flächeninhalt bezeichnet.*

Definition. *Die Orientierung einer Kurve C bestimmt sich über die Lage des Inneren von C: Ist die Fläche auf der linken Seite der Kurve ist die Orientierung positiv.*

Satz. *Sei $\alpha(t) = (x(t), y(t)), t \in [a, b]$ eine positiv orientierte einfache geschlossene Kurve und A der von der Kurve eingeschlossene Flächeninhalt.*

Dann gilt:

$$\begin{aligned} A &= -\int_a^b y(t)x'(t)\ dt = \int_a^b x(t)y'(t)\ dt \\ &= \frac{1}{2}\int_a^b (x(t)y'(t) - y(t)x'(t))\ dt \end{aligned} \tag{1}$$

Exkurse

Geometrisches und arithmetisches Mittel

Das geometrische Mittel zweier Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ ist kleiner oder gleich des arithmetischen Mittels dieser Zahlen,

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \leq \frac{a+b}{2},$$

die Gleichheit gilt genau dann auf, wenn $a = b$.

Cauchy-Schwarz-Ungleichung

Für Skalarprodukte der Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$|\langle v, w\rangle|^2 \leq \langle v, v\rangle \cdot \langle w, w\rangle,$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn v und w linear abhängig sind.

Für $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ gilt insbesondere

$$|v_1 w_1 + v_2 w_2|^2 \leq (v_1^2 + v_2^2) \cdot (w_1^2 + w_2^2).$$

Isoperimetrische Ungleichung

Satz. *Sei C eine einfache geschlossene ebene Kurve mit der Länge ℓ und A der Flächeninhalt des Inneren von C.*

Dann gilt die isoperimetrische Ungleichung

$$\ell^2 - 4\pi A \geq 0, \tag{2}$$

oder auch

$$A \leq \frac{\ell^2}{4\pi},$$

die Gleichheit gilt genau dann, wenn C einen Kreis beschreibt.

$$\begin{aligned} A + \pi r^2 &= \int_0^\ell (xy' - \bar{y}x')\ ds \leq \int_0^\ell \sqrt{(xy' - \bar{y}x')^2}\ ds \\ &\leq \int_0^\ell \sqrt{(x^2 + \bar{y}^2)((x')^2 + (y')^2)}\ ds \\ &= \int_0^\ell \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}\ ds = \int_0^\ell r\ ds = \ell r \end{aligned} \tag{3}$$

$$\sqrt{A} \cdot \sqrt{\pi r^2} \leq \frac{A + \pi r}{2} \leq \frac{\ell r}{2} \tag{4}$$

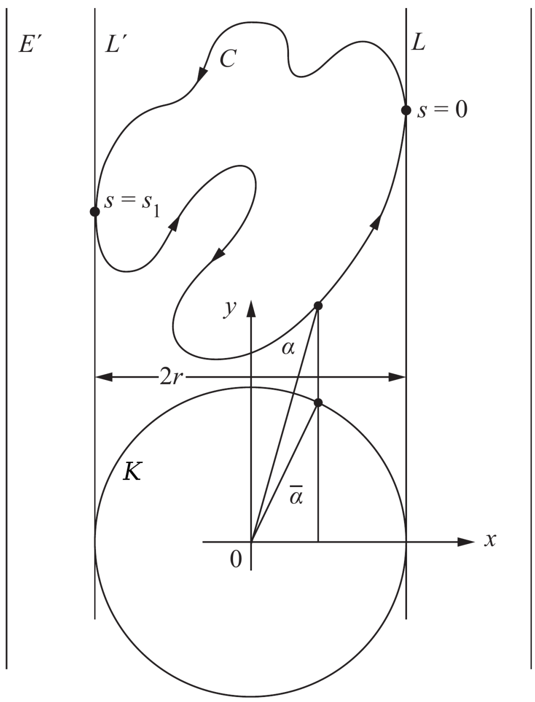

Abbildung 1: (do Carmo 2016, Bild 1.24, angepasst)

Quellen

do Carmo, Manfredo P. (1993). *Differentialgeometrie von Kurven und Flächen.* vieweg studium.

— (2016). *Differential Geometry of Curves and Surfaces.* 2. Aufl. Dover Publications.